

Practica III

Cálculo del Coeficiente de Restitución

Introducción a las Ciencias de la Tierra y el Espacio I - 2011

Índice

1. Introducción	1
1.1. Medios Granulares	1
2. Fundamento Teórico	2
2.1. Coeficiente de Restitución	2
3. Método Experimental	3
3.1. Materiales a Utilizar	3
3.2. Procedimiento	4
3.3. Discusión	5
4. Referencias:	5

1. Introducción

1.1. Medios Granulares

Los medios granulares son aquellos formados por un cierto número de objetos macroscópicos de cualquier tamaño (llamados granos) que interactúan por medio de contactos temporales o permanentes. Todos los materiales que se presentan en forma de granulados (cereales, arena...) o polvos (talco, harina...) son estudiados por la física de medios granulares. Los avances en el conocimiento del comportamiento de estos materiales tienen múltiples aplicaciones en la industria agrícola, alimenticia, de la construcción y farmacéutica, entre otras. Ejemplos concretos son: almacenamiento y transporte de granos, píldoras y materiales de construcción. El material granular representa un tipo de materia que no puede describirse muy bien en términos de los métodos convencionales, (por ejemplo), sólidos, líquidos o gases. Si bien cada partícula es un sólido independiente, un conglomerado de partículas granulares muestra comportamientos inusuales diferentes a la de los sólidos, debido a que la interacción dinámica entre las partículas es disipativa, es decir, no se conserva la energía. En este tipo de procesos se han identificado fenómenos por todos conocidos pero que no son comprendidos totalmente hasta el momento, como ser atascamiento de granos, formación de arcos de partículas, segregación por tamaño, respuesta a golpes e impactos, fracturación, etc.. Estos procesos se han estudiado experimentalmente, mediante el desarrollo de experiencias de laboratorio que reproducen los fenómenos, y en las últimas décadas en forma numérica, a través de modelos computacionales. El método de los elementos discretos (*Discrete Element Method* - DEM) simula el comportamiento mecánico de un medio formado por un conjunto de partículas las cuales interactúan entre sí a través de sus puntos de contacto (*Cundall & Strack, 1979*). Inicialmente veremos una demostración del proceso de segregación por tamaño de un medio granular compuesto por diferentes partículas que está sometido a reiteradas sacudidas (*Kudrolli 2004*), ver figura (1.1).



Figura 1.1: Caja con bolitas de diferente tamaño que se hace sacudir para ver el proceso de segregación por tamaño. Tal efecto se conoce como *Efecto de las Nueces de Brasil*.

Procesos asociados a medios granulares se han observado en una variedad de escenarios geológicos como la formación y transporte de dunas, vibraciones producidas en terremotos y segregación por tamaño en asteroides sometidos a impactos, ver figura (1.2).

El proceso crucial que determina el comportamiento de los granos es el mecanismo de contacto entre los mismos y con las paredes del recipiente. El objetivo de la presente experiencia es avanzar en la comprensión de los mecanismos y características de los modelos de contacto, estudiando la disipación de energía en medios granulares y su aplicación con propósitos útiles, particularmente en los casos en que las partículas interactúan con una pared. La interacción entre las partículas se modela como una fuerza similar a la que se hace al forzar un resorte vertical o a una esfera que puede ser deformada pero cuya deformación desaparece cuando se deja de ejercer la fuerza que le aplicamos. Agregamos además la viscosidad (modelo de *Hertz*).

2. Fundamento Teórico

Durante una colisión ideal, por ejemplo una colisión elástica, toda la energía cinética de la partícula se transforma en deformación elástica durante el proceso de contacto, para luego ser reconvertida en energía cinética cuando la partícula rebota (*Vargas et al.* 2006). En la práctica, siempre se pierde energía durante el proceso de contacto y rebote. Esta pérdida de energía, es efectivamente un proceso disipativo. Tres mecanismos contribuyen fundamentalmente a dicha disipación energética:

1. Energía perdida debido a las vibraciones de la superficie (ondas superficiales y volumétricas) así como la vibración almacenada en la partícula luego de la colisión
2. Energía perdida debido a la deformación plástica de la superficie blanco y la partícula que colisiona
3. Energía disipada debida a las características visco-elásticas de la partícula y la superficie.

2.1. Coeficiente de Restitución

Independientemente del tipo de materiales involucrados, para una colisión, el coeficiente de restitución ε se define como la relación entre la velocidad de la partícula después de la colisión v_f y antes

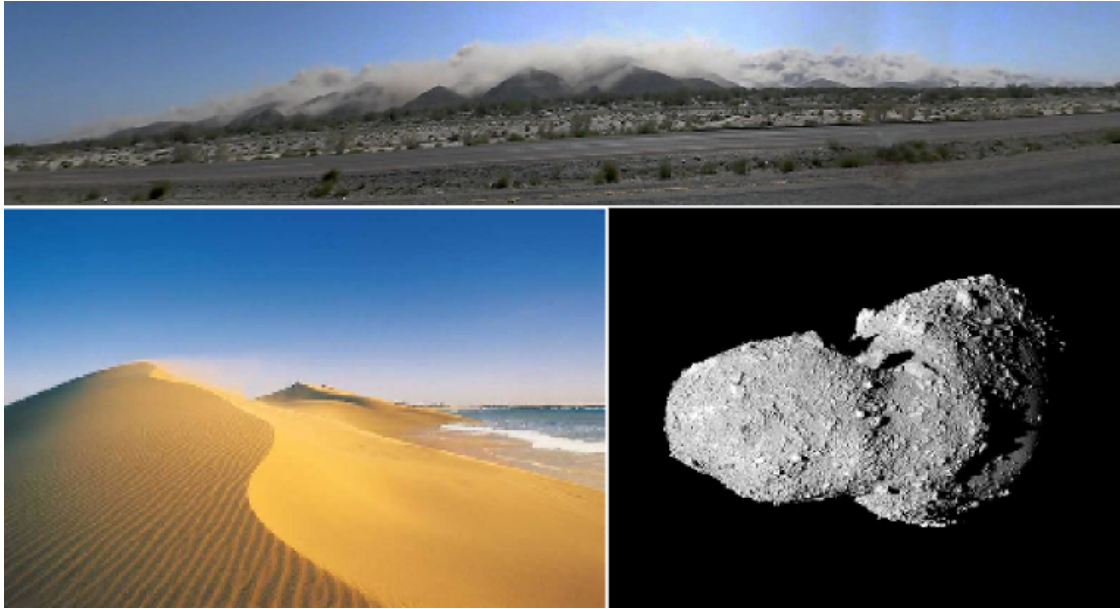


Figura 1.2: SUPERIOR: Nube de polvo generada en un terremoto. INFERIOR-IZQUIERDA: Duna de arena. INFERIOR-DERECHA: Asteroide Itokawa y su distribución de tamaños de rocas en su superficie.

de la colisión v_i como se muestra en la ecuación (2.1)

$$\varepsilon = \frac{v_f}{v_i} \quad (2.1)$$

3. Método Experimental

En esta experiencia se dejarán caer esferas de diferentes materiales sobre una superficie lisa donde se producirá el impacto. Utilizaremos un micrófono conectado a la placa de sonido de la computadora para registrar el sonido producido por los sucesivos impactos de la esfera soltada desde una altura h_0 . El archivo de audio así generado y leído directamente en Matlab a través de los siguientes comandos. Para grabar el sonido primero hay que definir las características del mismo de esta forma

```
rebotes=audiorecorder(44100,16,1)
```

Donde $44100Hz$ es la *SampleRate*, 16 es la profundidad de *bits* del sonido y 1 es el el número de canales en los cuales se grabará el sonido (*mono* o *stereo*), en este caso *mono*.

```
recordblocking(rebotes, 10);
```

Aquí especificamos que vamos a grabar el objeto rebotes, durante 10 segundos de tiempo.

```
[y,t]=getaudiodata(rebotes);
```

Luego los 2 vectores creados contienen la intensidad de sonido en y , y el instante de tiempo en el que se da la señal en el vector t .

3.1. Materiales a Utilizar

Las experiencias se harán con tres tipos de esferas: roca, aluminio y vidrio. Se compararán las determinaciones del coeficiente para cada caso. Se harán experiencias con dos esferas de vidrio de diferente tamaño.

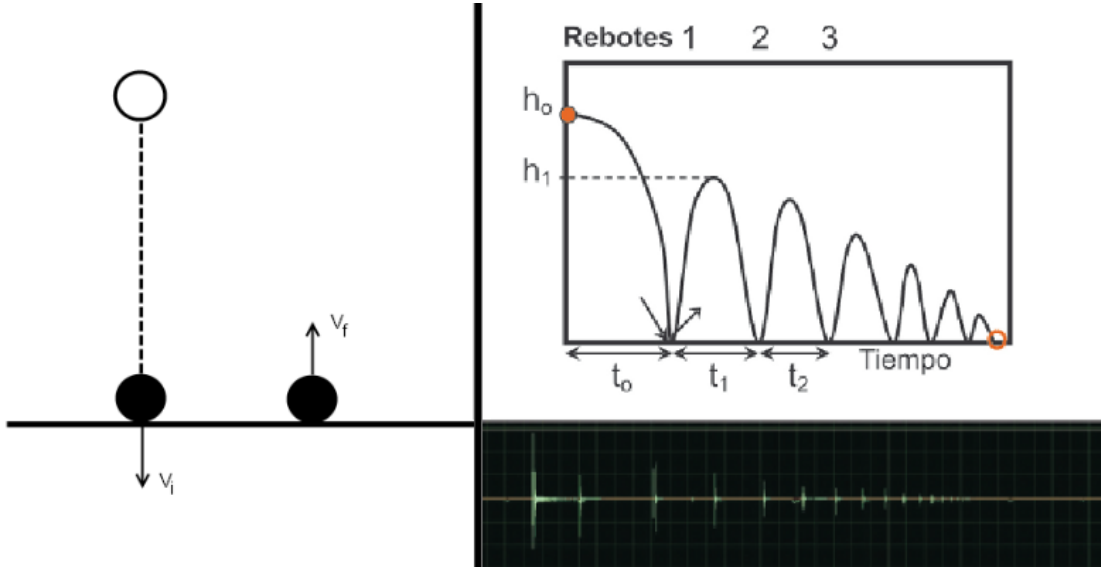


Figura 2.1: IZQUIERDA: Colisión de una partícula contra una superficie. DERECHA: Esquema del dispositivo experimental y gráfico de la señal de audio típica de una secuencia de rebotes

3.2. Procedimiento

Para relacionar el coeficiente de restitución ε con el tiempo entre rebotes, asumimos que la resistencia del aire es despreciable y que ε es independiente de la velocidad de impacto. Observe que la ecuación (2.1) sabemos que para el j -ésimo rebote se cumple

$$\varepsilon v_{j-1} = v_j \quad \text{con } j = 1, \dots, n \quad (3.1)$$

La ecuación (3.1) es una relación de recurrencia en la cual puede sustituirse nuevamente $\varepsilon v_{j-2} = v_{j-1}$ y así sucesivamente hasta llegar a v_o obteniendo

$$\varepsilon^N v_o = v_N \quad (3.2)$$

La ecuación (3.2) se obtiene a partir del modelo de *Bernstein* (1977), donde N es el número total de rebotes de la bolita, v_o es la velocidad justo antes del primer impacto y v_n es la velocidad justo después del impacto número N . Si consideramos el tiempo transcurrido entre impactos, tenemos que para el j -ésimo impacto, t_n es el tiempo transcurrido entre el impacto j y el $j + 1$, v_j es la velocidad justo después del j -ésimo impacto y $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad.

$$t_j = \frac{2v_j}{g} \quad (3.3)$$

Sustituyendo la ecuación (3.1) en (3.3) y aplicando la relación de recurrencia para los N rebotes obtenemos

$$t_N = \varepsilon^N \frac{2v_o}{g} \quad (3.4)$$

La ecuación (3.4) es la ley que rige el tiempo transcurrido entre rebotes en función del número de rebote que se trate. Para cada pareja de valores (N, t_N) medida experimentalmente, es posible deducir un valor del coeficiente de restitución ε . Pero dado que tenemos información de muchos rebotes haremos un ajuste lineal por el método de mínimos cuadrados para obtener un valor más certero de ε . Aplicando

logaritmo en base 10 a la ecuación (3.4) y algunas propiedades del logaritmo, logramos linealizar la ecuación obteniendo

$$\log_{10}(t_N) = N \log_{10}(\varepsilon) + \log_{10}\left(\frac{2v_o}{g}\right) \quad (3.5)$$

Finalmente calcularemos

- ε para cada material a partir del ajuste por mínimos cuadrados en la ecuación (3.5)
- La relación que guardan los parámetros del ajuste con los datos del problema (ε , v_o y g)

3.3. Discusión

Los datos experimentales obtenidos

- ¿Cómo se construye el eje del tiempo con estos datos?
- ¿Bajo qué hipótesis es lineal en escala logarítmica la curva $\log(t_n)$ vs n ?
- ¿Cómo puede determinar si es cierta la hipótesis de que la fracción de pérdida de energía es constante en cada impacto?
- ¿Cómo puede discutir la hipótesis de la independencia de ε respecto de la velocidad de impacto?

Para el caso de esferas viscoelásticas se ha hallado una relación entre ε y V como indica la ecuación (3.6) a través del modelo propuesto por *Kuwabara & Kono, 1987*.

$$\varepsilon = 1 - \frac{C}{R}V^{1/5} \quad (3.6)$$

- Con este tipo de dependencia ¿se puede esperar que con el dispositivo experimental usado, se pueda determinar la validez de esta relación?
- ¿Hay dependencia del coeficiente de restitución el tamaño de las esferas del mismo material?

4. Referencias:

- Bernstein A., 1977, “*Listening to the coefficient of restitution*” Am. J. Phys. 45, 41–44.
- Cundall P., Strack O., 1979, “*A discrete numerical model for granular assemblies*” Geotechnique, 29, 47.
- Kuwabara G., Kono K., 1987, “*Restitution Coefficient in a Collision between Two Spheres*”, Jpn. J. Appl. Phys., 26, 1230.
- Kudrolli. A., 2004, “*Size separation in vibrated granular matter*”, Rep. Prog. Phys. 67 209–247.
- Vargas W., Pineda L., Murcia J. C., 2006, “*Impacto inelástico de una partícula sobre una superficie*”, Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Vol. 16, N° 1, 80.