Practica I - Parte 4

Teoría de Propagación de Errores

Introducción a las Ciencias de la Tierra y el Espacio I - 2011

Índice

1. Introducción

Es ampliamente sabido que cuando reportamos el valor de una magnitud física, la misma debe ir acompañada de su error correspondiente. Al efectuar una medida directa de cierta magnitud física, lo hacemos con un cierto error asociado. Este error depende de muchos factores que mas o menos pueden ser acotados por un valor que en general conocemos. Este valor puede ser dado por el fabricante del dispositivo (en el caso de un voltímetro) o ser directamente la apreciación del instrumento (en el caso de una regla milimetrada). De todas formas basta con establecer cual es el error en nuestra medida para reportar la misma correctamente. Esto es fácil en los casos mencionados anteriormente, porque tales eran "medidas directas".

2. Propagación de Errores

No siempre disponemos del instrumento capaz de medir la magnitud que queremos. Supongamos que deseamos medir el volumen de agua que contiene una piscina. La magnitud física que queremos medir entonces es el "volumen" y entonces necesitamos una cubeta graduada para hacerlo. Si ponemos el agua de la piscina dentro esta cubeta habremos medido el volumen de agua. Para conocer el error que cometimos en nuestra medida bastaría con fijarse en la apreciación de la cubeta (dato del fabricante que en general se encuentra impreso en la misma). Y de estar forma comunicar la medida de la siguiente manera

$$V \pm \Delta V \;\; [L^3]$$

Pero supongamos que no disponemos de una cubeta que mida volúmenes. Ahí es cuando nos damos cuenta que la piscina es de base rectangular entonces se nos ocurre naturalmente medir los lados de la misma y la profundidad. Efectuando una multiplicación sabremos el volumen de agua contenido en la cubeta. Pero surge la pregunta siguiente: que error hemos cometido? los errores se multiplican? se suman?

Dado que hemos determinado el volumen de forma indirecta (midiendo tres longitudes), debemos estudiar como se propaga el error de tomar tres medidas distintas, al volumen final de agua. Cada una de las medidas de los lados de la piscina es una medida independiente de las otras dos, por lo tanto estará afectada de su propio error.

$$\begin{cases} l_1 \pm \Delta l_1 & \text{largo} \\ l_2 \pm \Delta l_2 & \text{ancho} \\ l_3 \pm \Delta l_3 & \text{profundidad} \end{cases}$$

Del análisis matemático puede demostrarse que dada una magnitud física $\mathcal{M}$ que es función de otras magnitudes físicas $x_1, x_2, ..., x_n$, cuyos errores independientes son $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$, tiene un error total asociado dado por la siguiente expresión

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(x_1, x_2, ..., x_n)$$

$$\Delta\mathcal{M} = \left|\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_1}\right| \Delta x_1 + \left|\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_2}\right| \Delta x_2 + ... + \left|\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_n}\right| \Delta x_n \tag{1}$$

Las cantidades entre paréntesis de valor absoluto son las derivadas parciales de $\mathcal{M}$ y están evaluadas en las medidas $(x_1, x_2, ..., x_n)$ realizadas. En forma más compacta $\Delta\mathcal{M}$ queda de la siguiente forma

$$\Delta\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x_i}\right| \Delta x_i$$

A este procedimiento se conoce como propagación de errores sobre la magnitud física $\mathcal{M}$ y su enunciado sera simplemente

$$\mathcal{M} \pm \Delta\mathcal{M}$$

Ejemplo 1 Volviendo al ejemplo de la piscina, queremos calcular el volumen de agua contenido conociendo las medidas de la misma con sus respectivos errores. El volumen de la piscina es el producto de las tres medidas realizadas

$$V = V(l_1, l_2, l_3) = l_1 l_2 l_3$$

Supongamos por comodidad que se trata de una piscina de base cuadrada y sus medidas resultaron ser $l_1 = l_2 = 2,50$ m y $l_3 = 0,80$ m y sus errores respectivos son $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 0,01$ m. Luego el volumen es

$$V = 5\ m^3$$

Solo falta calcular el error ΔV mediante la propagación de errores

$$\Delta V = \left|\frac{\partial V}{\partial l_1}\right| \Delta l_1 + \left|\frac{\partial V}{\partial l_2}\right| \Delta l_2 + \left|\frac{\partial V}{\partial l_3}\right| \Delta l_3$$

$$\Delta V = |l_2 l_3|\, \Delta l_1 + |l_1 l_3|\, \Delta l_2 + |l_1 l_2|\, \Delta l_3$$

$$\Delta V = |2|\, 0,01 + |2|\, 0,01 + |6,25|\, 0,01$$

$$\Delta V = 0,1025\ m^3$$

$$\Delta V \approx 0,1\ m^3$$

Luego comunicamos el resultado del volumen como sigue

$$V = 5,0 \pm 0,1\ m^3$$

2.1. Derivadas Parciales

Un concepto que resulta nuevo es el de “derivada parcial”. La “derivada” tal cual la estudiamos en el liceo y que la notábamos con una comilla, no es mas que la “derivada total” de la función. Este era el caso cuando la función de estudio era de una sola variable. Por ejemplo la función

$$f(x) = 3x^2$$

Donde su derivada se calculaba de esta forma

$$(f(x))' = \left(3x^2\right)' = 2{,}3x^1 = 6x$$

Otra notación de la derivada total que es equivalente a las comillas es esta

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(f(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 6x$$

Cuando la función depende de mas de una variable, la derivada debe calcularse con respecto a una de ellas. No es posible derivar una función con respecto a todas las variables al mismo tiempo, si no qu deben calcularse las derivadas por separado para estudiar como cambia la función con respecto a esa variable en particular. Esto quiere decir que cuando derivamos con respecto a una variable, el resto deben quedar fijas, como si fueran constantes numéricas.

Supongamos que tenemos una función de dos variables de esta forma

$$f(x, y) = 3x^3 + 4y^2 + 2$$

La derivada con respecto a x se efectúa dejando la variable restante y como fija y cualquier termino que dependa exclusivamente de y tendrá derivada nula, tal como si fuera la derivada de una constante, como es el caso de los dos últimos términos de f.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 + 4y^2 + 2\right) = 9x^2$$

Análogamente la derivada con respecto a y queda

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(f(x, y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^3 + 4y^2 + 2\right) = 8y$$

Aquí el único término derivado es el segundo dado que los otros dependen de constantes y la variable x que también es tomada como constante en esta derivada.

Ejercicio 1

Realice la propagación de errores y reporte la medida del área de un rectángulo cuyos lados miden 20 y 30 cm respectivamente y sus errores asociados son de 1 cm para ambos.

Ejercicio 2

Se pretende estimar el volumen de una pelota de fútbol, la cual puede suponerse totalmente esférica, conociendo que el diámetro de la misma es de 69 cm y la incertidumbre al medirlo fue de 1 cm.

Nota: El tamaño oficial de la pelota de fútbol utilizado por la FIFA es el talle n^{o}5. La misma debe tener un diámetro de entre $68 - 70$ cm y debe estar llena de “aire” a una presión de entre $600 - 1100$ g/cm^2(medido al nivel del mar), presentando un peso total de entre $410 - 450$ g y debe estar recubierta de cuero o algún otro “material adecuado”.